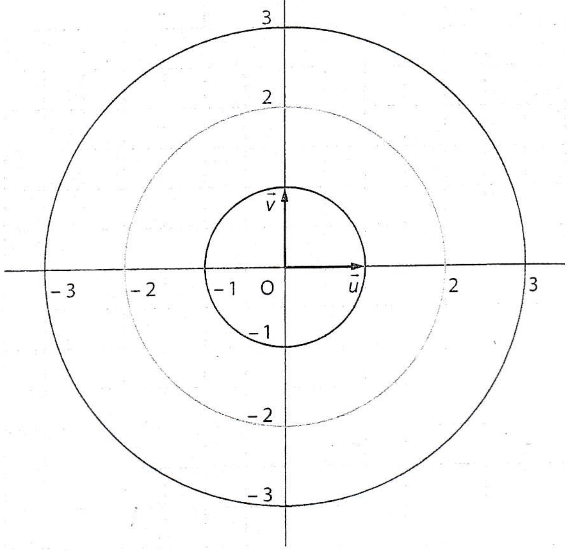
Choisir la bonne forme

ORGANISER SES CONNAISSANCES

1. Associer, à chaque nombre complexe z_k de la colonne de gauche, son écriture sous forme exponentielle et placer leurs points M_k d'affixes z_k dans le plan complexe.

- $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ○ $3e^{i\pi}$
- $z_2 = \sqrt{3} - i$ ○ $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
- $z_3 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ○ $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
- $z_4 = -3$ ○ $3e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- $z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ○ $e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $z_6 = 2 - 2i$ ○ $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
- $z_7 = 1 - \sqrt{3}\,i$ ○ $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- $z_8 = -2i$ ○ $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$



2. Choisir la forme la plus adaptée pour déterminer les nombres suivants :

a. $z_5 + z_8$ **b.** $z_2 z_6$ **c.** z_7^2 **d.** $z_5 + \overline{z_5}$

e. $1 + z_1 + z_1^2$ **f.** z_7^9 **g.** $\frac{z_2}{z_5}$ **h.** $|z_1 z_2 z_3|$

84 ALGORITHMIQUE   @ TICE

A. Soit f, g et h les fonctions définies sur $[0\,;\pi[$ par :

$f(x) = x - \sin x$; $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$;

$h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$.

1. Étudier le sens de variation de f et en déduire son signe.

2. Faire de même pour g puis pour h.

3. En déduire que pour tout x de $[0\,;\pi]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

B. On s'intéresse à la suite (S_n) définie par

$S_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Avec un logiciel ou une calculatrice

a. Conjecturer à l'aide d'un algorithme la limite ℓ de cette suite. Expliquer votre démarche.

b. Déterminer le premier entier n tel que $u_n \approx \ell$ à 10^{-4} près.

2. Soit (V_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

a. Calculer V_n en fonction de n et en déduire sa limite.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leqslant n^4.$$

c. Déduire de la partie A que pour tout $n \geqslant 1$,

$$V_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leqslant S_n \leqslant V_n.$$

d. En déduire la limite de la suite (S_n).

85 La constante d'Euler

Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

1. a. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, sur l'intervalle $[k\,;k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$.

b. En déduire que : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

c. Interpréter cette inégalité en termes d'aire à l'aide de la courbe représentative de la fonction inverse sur $[k\,;k+1]$.

2. Déduire de la question 1.b. que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant S_n - \frac{1}{n}$ puis que $\ln n + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$.

3. En déduire la limite de la suite (S_n).

4. a. Représenter graphiquement à l'aide d'un logiciel les suites (S_n) et $(\ln n)$ sur la même figure pour $1 \leqslant n \leqslant 5\,000$. Qu'observe-t-on ?

b. On pose pour tout entier naturel non nul n, $u_n = S_n - \ln n$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite γ et que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

5. On considère pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

a. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que pour tout n, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.
Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

d. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, déterminer un encadrement de γ à 10^{-4} près.

① $\boxed{84}$ $f(x) = x - \sin x$ sur $[0;\pi[$

Ⓐ 1) f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a : $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ car $\forall x \; -1 \leq \cos x \leq 1$ donc f est $\nearrow$.

$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$ et $f \nearrow$ donc $f(x) \geq f(0) = 0$ soit $\boxed{f(x) \geq 0}$

2) g et h sont dérivables etc. et $g'(x) = x - \sin x = f(x) \geq 0$ donc $g \nearrow$

$g(0) = -1 + \frac{0^2}{2} + \cos 0 = 0$ donc $\boxed{g(x) \geq 0}$ également.

$h'(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x = g(x) \geq 0$ donc $h \nearrow$ et $h(0) = 0$ donc $\boxed{h(x) \geq 0}$

3) $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \geq 0 \Rightarrow \boxed{\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}}$

$f(x) = x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq \sin x}$

$\forall x \in [0;\pi[$ $\boxed{x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$

Ⓑ $S_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

1.a.

```
Lire n
0 -> S
For k=1 to n
  S + sin(k/n²) -> S
End For
Disp S
```

Pour $n = 1000$ on obtient $S_{1000} \simeq 0{,}50049995\dots$

donc $\boxed{\text{conjecture : } \ell = 1/2}$

Pour $n = 50\,000$ on obtient $S_{50\,000} \simeq 0{,}50001$

(30 minutes avec la TI 82...)

Pour $\boxed{n = 10000}$, on obtient $S_{10\,000} = 0{,}5000499\dots$
$= 0{,}5$ à 10^{-4}

2) a) $V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}}$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2n}\right) = 0$

b) Montrons par récurrence sur n, que $\sum_{1}^{n} k^3 \leq n^4$

- $\underline{n=1}$ $\quad 1^3 \leq 1^4$

($n=2$ $\quad 1^3 + 2^3 = 9 \leq 2^4 = 16$)

- $\underline{\text{Hérédité}}$: Hyp : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$ pour un certain entier n.

A-t-on alors $\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{A} + (n+1)^3 \leq (n+1)^4$?

on sait que $\quad A \leq n^4$ (Hypo)

$A + (n+1)^3 \leq n^4 + (n+1)^3 \leq (n+1)^4$?

Posons $\varphi = n^4 + (n+1)^3 - (n+1)^4 = n^4 + (n+1)^3(1 - n - 1) = n^4 - n(n+1)^3$

$= \cancel{n^4} - n(\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1) = -3n^3 - 3n^2 - n \leq 0$ car $n \in \mathbb{N}$.

On a donc bien $\quad A + (n+1)^3 \leq (n+1)^4$.

$\underline{\text{Conclusion}}$: la propriété : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$ est vraie car initialisée et héréditaire

c) En déduire que : $V_n - \frac{1}{6n^2} \le S_n \le V_n$.

D'après A.3. on a $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x \quad \forall x \in [0;\pi[$

Posons $x = \frac{k}{n^2} \in [0;\pi[$ on a $\frac{k}{n^2} - \left(\frac{k}{6n^2}\right)^3 \le \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$

soit

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1^3}{6n^6} \le \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \le \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2}{n^2} - \frac{2^3}{6n^6} \le \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) \le \frac{2}{n^2}$$

$$+ \qquad \vdots$$

$$\frac{n}{n^2} - \frac{n^3}{6n^6} \le \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) \le \frac{n}{n^2}$$

$$V_n - \frac{1}{6n^6}\big(\underbrace{1^3 + \dots + n^3}_{\le n^4}\big) \le S_n \le V_n$$

or $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \le n^4 \Rightarrow \frac{1}{6n^6}(1^3 + \dots + n^3) \le \frac{n^4}{6n^6} = \frac{1}{6n^2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{6n^6}(1^3 + \dots + n^3) \geq \frac{-1}{6n^2} \Rightarrow V_n - \frac{1}{6n^6}(1^3 + \dots + n^3) \geq V_n - \frac{1}{6n^2}$

on a donc bien $\boxed{V_n - \frac{1}{6n^2} \le V_n - \frac{1}{6n^6}(1^3 + \dots + n^3) \le S_n \le V_n}$

d). $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$ et $\lim V_n = \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1/2}$ et la conjecture est prouvée.

---

[85] La constante d'Euler γ :

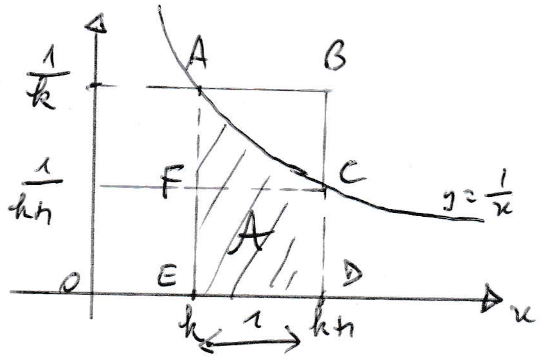
$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. a si $x \in [k;k+1]$ on a $k \le x \le k+1$ donc $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$

b) En intégrant de k à $k+1$: $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$

soit $\frac{1}{k+1}[x]_k^{k+1} \le [\ln x]_k^{k+1} \le \frac{1}{k}[1]_k^{k+1}$ soit $\boxed{\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k}}$

c).



$$\boxed{\mathcal{A}_{FCDE} \le \mathcal{A} \le \mathcal{A}_{ABDE}}$$

③ Suite $\boxed{\text{Ex } 85}$

2) Montrer que $S_n - 1 \le \ln n \le S_n - \frac{1}{n}$ $\quad \forall n \geq 1$.

on a vu que (cf 1.b) : $\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k}$

Donc, pour

$$
\begin{array}{lrcccl}
k=1 : & \frac{1}{2} & \le & \cancel{\ln 2} - \ln 1 & \le & \frac{1}{1} = 1 \\
k=2 & \frac{1}{3} & \le & \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} & \le & \frac{1}{2} \\
k=3 & \frac{1}{4} & \le & \ln 4 - \cancel{\ln 3} & \le & \frac{1}{3} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+ \quad k=k & \frac{1}{k+1} & \le & \ln(k+1) - \cancel{\ln k} & \le & \frac{1}{k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
k=n-1 & \frac{1}{n} & \le & \ln n - \cancel{\ln(n-1)} & \le & \frac{1}{n-1}
\end{array}
$$

D'où, en ajoutant chaque membre : $\underbrace{S_n - 1}_{\text{car il manque le } 1} \le \ln n - \underbrace{\ln 1}_{=0} \le \underbrace{S_n - \frac{1}{n}}_{\text{car il manque } \frac{1}{n}}$

D'où $S_n - 1 \le \ln n \le S_n - \frac{1}{n}$

on a donc $\ln n \le S_n - \frac{1}{n}$ donc $S_n \geq \ln n + \frac{1}{n}$

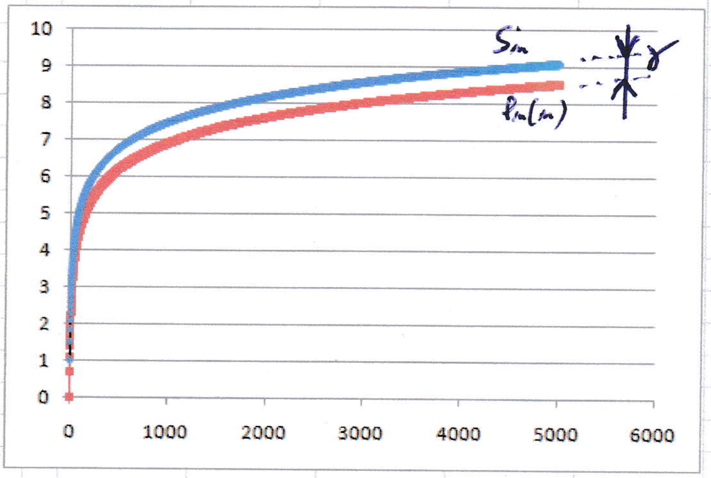
et $S_n - 1 \le \ln n$ donc $S_n \le 1 + \ln n$

et donc $\boxed{\ln n + \frac{1}{n} \le S_n \le 1 + \ln n}$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$ on a forcément, par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$

4.a.

I5 =I4+1/H5



Calcul de (Sn)

k	S+1/k = S_n	ln(n)	Δ
1	1	0	1
2	1,5	0,69314718	0,80685282
3	1,83333333	1,09861229	0,73472104
4	2,08333333	1,38629436	0,69703897
5	2,28333333	1,60943791	0,67389542
6	2,45	1,79175947	0,65824053
7	2,59285714	1,94591015	0,64694699
8	2,71785714	2,07944154	0,6384156
9	2,82896825	2,19722458	0,63174368
10	2,92896825	2,30258509	0,62638316
11	3,01987734	2,39789527	0,62198207
12	3,10321068	2,48490665	0,61830403
13	3,18013376	2,56494936	0,6151844

4) b) On pose $u_n = S_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$

on a $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$

or d'après 1.b : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $(u_n) \searrow$.

Par ailleurs, d'après 2.) $\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n$ donc $\frac{1}{n} \leq \underbrace{S_n - \ln n}_{u_n}$

donc $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$ et la suite (u_n) est minorée par 0.

<u>Conclusion</u> : la suite (u_n) est convergente car elle est $\searrow$ et minorée.

D'après 2.) $S_n - 1 \leq \ln n \Rightarrow S_n - \ln n \leq 1$ soit $u_n \leq 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

En notant $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$; on obtient $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$

⚠ γ s'appelle la constante d'Euler. $\boxed{\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n}$

5.) a) On pose $V_n = u_n - \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l} \lim u_n = \gamma \\ \text{et } \lim \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \gamma - 0 = \gamma}$

b) $V_{n+1} - V_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = -\ln(n+1) + \ln(n) + \frac{1}{n}$

or d'après 1b : $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ donc $V_{n+1} - V_n \geq 0$ et (V_n) est $\nearrow$

c) Montrons que $\forall n$: $V_n \leq \gamma \leq u_n$

- (V_n) est $\nearrow$ donc $V_0 \leq V_n \leq \gamma$
- (u_n) est $\searrow$ donc $\gamma \leq u_n \leq u_0$

on a donc $\boxed{V_n \leq \gamma \leq u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

L'amplitude de cet encadrement est : $u_n - V_n = \frac{1}{n}$ car $V_n = u_n - \frac{1}{n}$

d)

```
Lire N
0 -> S
For K=1 to N
S + 1/K -> S
End
S - ln(N) -> S
disp S
```

si N = 100 on obtient $\gamma \simeq 0{,}5822\ldots$

si N = 1000 " $\gamma \simeq 0{,}57771558\ldots$

si N = 3000 " $\gamma \simeq 0{,}57738\ldots$

$A = \frac{1}{n} = 10^{-4} \Rightarrow N = 10\,000$

donc si N = 10 000, on obtient $\boxed{\gamma \simeq 0{,}577265\ldots}$